www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ANNÉE 1990

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

EPREUVE DE (Durée : 1 h 30 - coefficient : 3)

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

On considère l'équation différentielle du second ordre suivant : (E) $x\,y''(x) + y'(x) + x\,y(x) = 0$.

1°/ Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$, de (E) , développables en série entière. Montrer qu'il existe une unique telle solution prenant la valeur 1 au point 0, on la notera J_0 . Donner l'expression de J_0 .

2°/ a) Montrer que l'équation (E) admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une solution K, de la forme : $K(x) = J_0(x)\,\text{Log}\,x + \varphi(x)$

où $\varphi(x)$ est la somme d'une série entière nulle pour $x = 0$. On posera $\varphi(x) = \sum_{p\geq 1}^{+\infty} d_p\,x^{2p}$ et on cherchera d_p sous la forme : $d_p = \dfrac{(-1)^{p+1}}{(p!)^2}\,\dfrac{S_p}{2^{2p}}$

Déterminer S_p . Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?

b) Déterminer le wronskien : $W(J_0, K)(x) = \det\begin{bmatrix} J_0(x) & K(x) \\ J_0'(x) & K'(x) \end{bmatrix}$

en montrant qu'il est solution d'une équation différentielle.

On rappelle que si le wronskien est non nul en un point de $\mathbb{R}_+^*$, alors il ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}_+^*$.

En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Etablir que toute solution f de (E) , définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, est de la forme $f = \alpha\,J_0$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante.

3°/ Déterminer une série entière $T(x) = 1 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \cdots$ vérifiant l'équation différentielle : $x\,y''(x) + y'(x) - x\,y(x) = 0$. Etablir une relation entre T et J_0 .

4°/ Soit $k \in \mathbb{R}$ une constante, écrire l'équation différentielle satisfaite par la fonction $y(x) = J_0(kx)$.

5°/ a) Prouver que la fonction H définie par : $H(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,d\theta$

est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation (E) . Etablir une relation entre H et J_0 .

T.S.V.P.

b) Retrouver le résultat précédent en cherchant directement le développement en série entière de H(x).

c) Prouver qu'il existe une constante C telle que :

$$\forall\, x > 0 \quad J_0(x) = C \int_0^x \frac{\cos u}{\sqrt{x^2 - u^2}}\, du \quad .$$

Préciser la valeur C .

6°/ On pose : $r_q = \displaystyle\int_{(q-1)\pi}^{q\pi} \frac{\cos u}{\sqrt{n^2\pi^2 - u^2}}\, du$ où $q \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Etablir que : $r_q = (-1)^q \displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi_q(z) \cos z \; dz$ où :

$$\varphi_q(z) = \frac{1}{\sqrt{n^2\pi^2 - (q\pi - z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{n^2\pi^2 - (q\pi - \pi + z)^2}}$$

b) Etablir que pour $q \geq 1$ et $z \in [0, \pi/2]$, $\varphi_q(z)$ est positif.

c) Etablir que $\forall\, z \in [0, \pi/2]$, la suite $\left(\varphi_q(z)\right)_{q \geq 2}$ est croissante.

d) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $J_0(n\pi)$ est du signe de $(-1)^n$.
Quelle conclusion peut-on en tirer ?

7°/ Soit λ un réel > 0 , on pose : $\Gamma(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\lambda - 1}\, e^{-t}\, dt$

Prouver la convergence de cette intégrale. Etablir une relation entre $\Gamma(\lambda+n)$ et $\Gamma(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

8°/ On considère l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + \frac{1}{x}\, y'(x) + \left(1 - \frac{h^2}{x^2}\right) y(x) = 0$$

où $h \geq 0$ est un réel donné.

On pose $y = x^h Z$, écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction Z . Déterminer une série entière solution de cette équation.

Montrer que si l'on choisit pour premier coefficient de la série entière, $\dfrac{1}{2^h\, \Gamma(h+1)}$, alors la fonction Γ permet d'obtenir une expression simple - à préciser - des coefficients. Etudier la convergence de la série.

—=o()o=—

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail